CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 15 december 2022
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	6	2	4	4	2	2
b	5	4	5	5	6	6
c	4	4	2	5		5
d	4		4			
e			2			
Totaal	19	10	17	14	8	13

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 48x^4 - 64x^3 + 24x^2 - 1$.

6pt a Bereken algebraïsch de minimale waarde van $f(x)$.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-2x}$.

5pt b Bereken algebraïsch een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g in de oorsprong $O(0, 0)$.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = 3 \cdot 4^x$.

4pt c Los de vergelijking $h(x) = 108$ algebraïsch op.
Geef een benadering van uw antwoord afgerond op 3 cijfers achter de decimale komma.

Het verband tussen de grootheden Q en R wordt gegeven door de formule

$$\log(R) = \frac{1}{5}Q - 3$$

Deze formule kan worden herleid tot een formule van de vorm

$$R = c \cdot d^Q$$

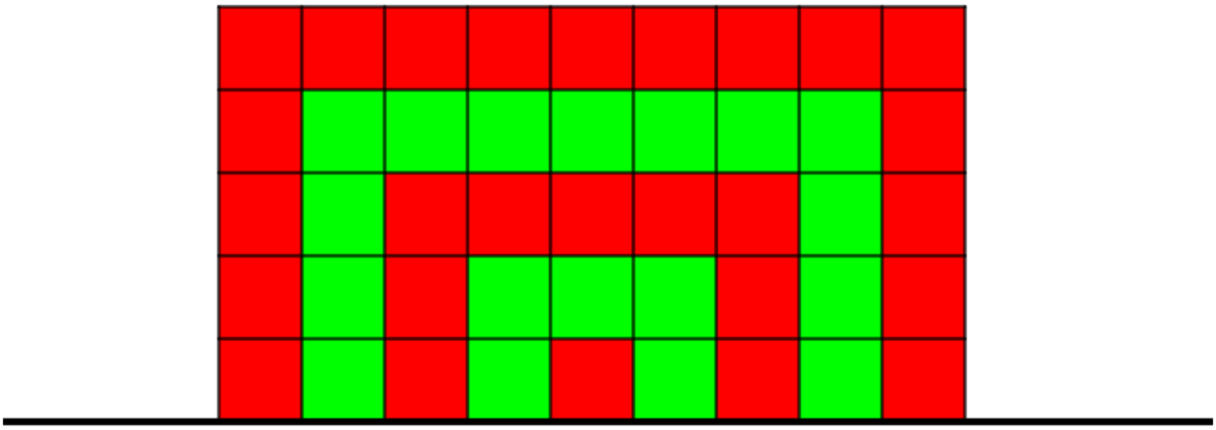
4pt d Bereken algebraïsch de waarden van c en d in deze tweede formule.

Opgave 2 – Tegels in een patio

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bert legt tegels in zijn patio.
In de eerste stap legt hij een rode tegel aan de rand van de patio.
In de tweede stap voegt hij links en rechts een groene tegel toe en legt hij een rij groene tegels boven de eerste drie tegels.
In de volgende stappen voegt hij op een vergelijkbare manier rode en groene tegels toe.

In de figuur hieronder ziet u het patroon van de tegels na vijf stappen.



2pt **a** Hoeveel groene tegels worden er in de zesde stap toegevoegd?

Het aantal tegels dat in stap n wordt toegevoegd, wordt gegeven door de recursieve formule

$$\begin{cases} a(n+1) = a(n) + 4 \\ a(1) = 1 \end{cases}$$

De directe formule voor dit aantal is $a(n) = 4n - 3$.

4pt **b** Laat zien hoe deze directe formule wordt afgeleid uit de recursieve formule.

Het totale aantal tegels dat na stap n gelegd is, wordt gegeven door een formule van de vorm $t(n) = pn^2 - qn$.

4pt **c** Bereken met behulp van de somformule van een rekenkundige rij de waarden van p en q in deze formule.

Opgave 3 – Fruit en een raaf

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Het spelletje *Boomgaard* gaat over een fruitmand met vier kleuren fruit en een raaf, die probeert om de fruitmand te stelen.
Bij het begin van een beurt moet een speler werpen met een dobbelsteen met vier gekleurde zijden (groen, blauw, rood en geel), een zijde met de raaf en een zijde met een fruitmand. Als één van de kleuren boven komt, wordt een stuk fruit van die kleur in de fruitmand gelegd en als de fruitmand boven komt, mag de speler een stuk fruit van de kleur van zijn keuze in de fruitmand leggen.
Maar als de raaf boven komt, komt hij een stap dichter bij het stelen van de fruitmand.

Neem in vraag a en b aan dat de dobbelsteen eerlijk is, dus dat elk van de zes zijden een even grote kans heeft om boven te komen bij elke worp.

Hielke speelt dit spelletje met zijn kleinkinderen. Ze merken op dat de zijde met de raaf in de eerste 40 beurten geen enkele keer boven komt. Na wat rekenwerk neemt Hielke aan dat de kans hierop kleiner is dan 1 op 1500.

4pt a Onderzoek of Hielkes aanname juist is.

5pt b Bereken de kans dat de zijde met de fruitmand tenminste twee keer boven komt in de eerste tien worpen van een spel.

Nadat ze dit spel een aantal keer gespeeld hebben, vermoedt Hielke dat de dobbelsteen niet eerlijk is. Hij besluit om dit te toetsen door 100 keer met deze dobbelsteen te werpen en te tellen hoeveel keer de zijde met de raaf boven komt in deze 100 worpen.

2pt c Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

In deze 100 worpen komt de zijde met de raaf 10 keer boven. Dit geeft een overschrijdingskans van 0,0477.

4pt d Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de toetsingsgrootheid die gebruikt is om deze overschrijdingskans te berekenen.

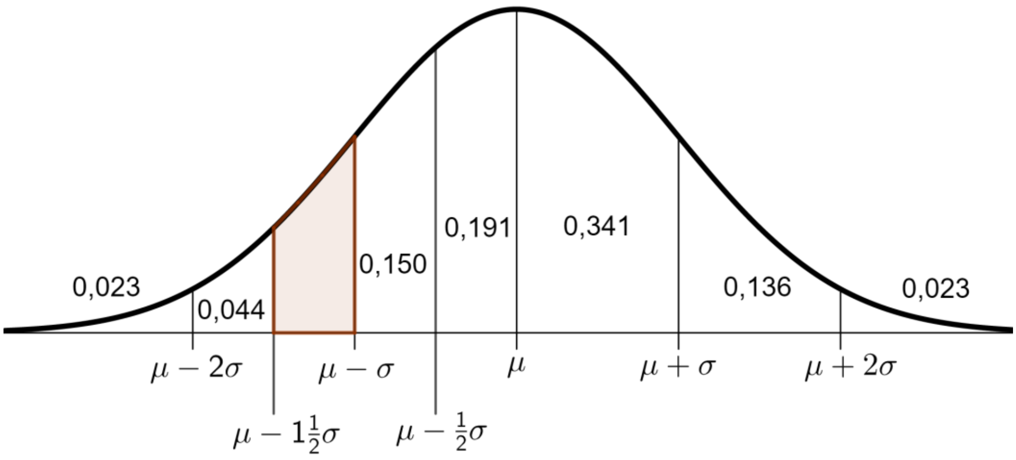
2pt e Kunt u een conclusie trekken uit deze toetsingsprocedure?
Zo ja, wat is deze conclusie en waarom?
Zo nee, geef dan alle informatie aan die u nog meer nodig heeft om een conclusie te kunnen trekken.

Opgave 4 – Appels in een doosje

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Het gewicht van de bekende Nederlandse *Elstar* appels is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 145$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 10$ g.

4pt a Gebruik de figuur hieronder om het percentage van deze appels te berekenen die een gewicht hebben tussen 145 g en 160 g.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu - 1\frac{1}{2}\sigma < X < \mu - \sigma\right) = 0{,}092$

Een supermarkt verkoopt deze appels is doosjes met vier appels per doosje. Het gewicht van de lege doosjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 20$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 1$ g.

5pt b Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het totale gewicht (appels + lege doosje) van zo'n doosje.

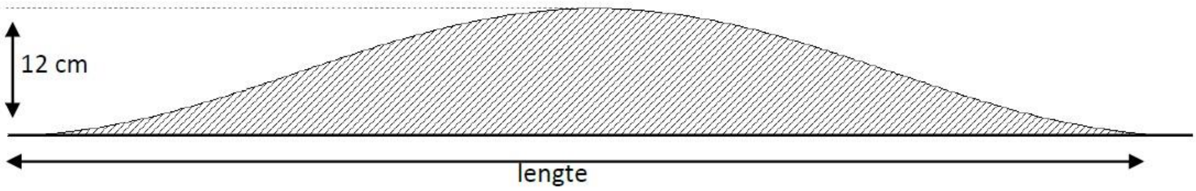
Saskia koopt drie van deze doosjes en zij weegt de twaalf appels in deze doosjes. Vijf van deze appels wegen meer dan 150 g. Nadat ze de appels gewogen heeft, legt Saskia deze in een fruitmand.
Peter pakt lukraak drie appels uit deze fruitmand.

5pt c Bereken de kans dat precies twee van de appels die Peter pakt meer dan 150 g wegen.

Opgave 5 – Verkeersdrempels

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft de vorm van een hele sinusgolf. Zie de onderstaande figuur.



Voor de verkeersdrempel van de figuur hierboven, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is de volgende formule opgesteld:

$$h = 0{,}06 + 0{,}06 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

2pt a Bereken algebraïsch de lengte van deze verkeersdrempel.

Een verkeersdrempel die hoort bij een maximumsnelheid van 60 km/uur is 12 meter lang en 14 cm hoog. Daarbij hoort een formule van de vorm:

$$h = a + b \cdot \sin\big(c(x - d)\big)$$

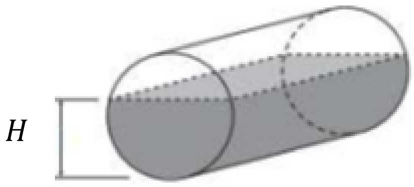
Hierin is h weer de hoogte en is x weer de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

6pt b Bepaal de waarden van a, b, c en d in deze formule.
Licht je antwoorden toe.

Opgave 6 – Leeglopend vat

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In de figuur hieronder ziet u een liggend vat dat gedeeltelijk gevuld is met een vloeistof. De cirkelvormige voor- en achterkant hebben een diameter van 1,8 meter.



Men laat het vat vanuit de gegeven situatie leeglopen.
De hoogte *H* (in meters) van de vloeistofspiegel *t* minuten na het begin van het leeglopen, wordt gegeven door de formule

$$H = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039 \cdot t)^{\frac{2}{3}}$$

2pt **a** Bereken algebraïsch de hoogte van de vloeistofspiegel een half uur nadat het leeglopen gestart is.

Op een gegeven moment is het vat nog half vol.

6pt **b** Bereken algebraïsch het tijdstip waarop dit het geval is.
Geef uw antwoord in seconden nauwkeurig.

5pt **c** Bereken met behulp van de afgeleide $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ algebraïsch de snelheid in centimeters per minuut waarmee de vloeistofspiegel daalt op $t = 10$.

Einde van het tentamen.

Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of ***uw naam*** *en het* ***opgavenummer*** *op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

Wat er ***niet*** *in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ p > 0,\ \ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1}$ $(r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$

